ACADÉMIE
DE CRÉTEIL
Liberté
Égalité
Fraternité

2023

Mathématiques des grandeurs

Opérations et proportionnalité

Guide pratique pour les enseignants
de mathématiques et de physique-chimie

Groupe G2M
Mathématiques des grandeurs et modélisations
Irems de Paris, Université Paris Cité

Avec les contributions des inspections
de mathématiques et de physique-chimie
des voies générale, technologique et professionnelle
de l'académie de Créteil

2024

IREMS
DE PARIS

Sommaire

Opérations et applications numériques
ou le droit et l'importance de conserver les unités dans les calculs 5

Opérations et conversions
ou l'explicitation de la grandeur de référence 6

Opérations, relations entre unités et mesure
ou l'enjeu de la comparaison entre grandeurs 7

Opérations et situations de comparaison
ou les significations des opérations élémentaires 8

Opérations et isolement de terme
ou l'enjeu du raisonnement face aux astuces 9

Proportionnalité et langage naturel
ou la mobilisation explicite des propriétés multiplicative et additive 10

Proportionnalité, langages et approches
ou l'enjeu de varier les représentations 11

Proportionnalité et conversions
ou une nouvelle signification du trait de fraction 12

Proportionnalité, graphiques et modèles
ou la nécessité de cohérence entre disciplines 13

Conclusion et approfondissements 14

Les élèves rencontrent de nombreuses difficultés en calculs, mais des leviers existent pour les analyser puis accompagner les élèves.

L'intention première de ce guide pratique est d'inviter à porter un regard commun et partagé en cours de physique-chimie et de mathématiques, en particulier dans les situations où interviennent des grandeurs.

Ce document synthétise une partie du travail mené depuis bientôt dix ans au sein du groupe G2M – Mathématiques des grandeurs et modélisations – de l'Irems de Paris. Le guide pratique propose des éclairages originaux sur les pratiques en classe, tout en veillant à la cohérence entre les approches des mathématiques et de la physique-chimie.
Le livret peut être lu de manière linéaire, mais chaque page se veut autonome. Il est organisé en deux thématiques :

- les opérations avec grandeurs (applications numériques avec conservation des unités, conversions, isolement de terme, comparaisons entre grandeurs et significations des opérations dites élémentaires) ;
- la proportionnalité entre grandeurs (place du langage naturel et des autres langages, propriétés et approches, rôle du modèle dans les graphiques).

Pour cette édition 2024 du guide pratique, les inspections de mathématiques et de physique-chimie des voies générale, technologique et professionnelle de l'académie de Créteil ont associé leurs expertises à l'analyse de ces objets de formation présents tant dans le quotidien de l'enseignement de la physique-chimie, que dans le thème Grandeurs et mesures de l'enseignement des mathématiques.

Ce document est un objet de liens : entre l'Irems de Paris et l'académie de Créteil, entre les mathématiques et la physique-chimie, entre les voies générale, technologique et professionnelle, entre le collège et les lycées, entre l'enseignement secondaire et primaire.

Par son caractère interdisciplinaire, par l'importance accordée au langage naturel et aux croisements des représentations, par la place centrale occupée par la question du sens, notamment des opérations dites élémentaires utilisées dans le contexte des grandeurs, cette édition 2024 du guide pratique s'inscrit pleinement dans les 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques du plan Villani-Torossian.

Le guide pratique rend compte d'une pensée collective toujours en mouvement.
Les questions soulevées importent autant que les réponses proposées.

Opérations et applications numériques

ou le droit et l'importance de conserver les unités dans les calculs

Depuis une cinquantaine d'années s'est imposée en France une tradition selon laquelle il serait inutile, encombrant, voire interdit d'écrire les unités de mesure dans les calculs. Cette pratique doit-elle être remise en question ?

Ce que préconise l'institution

« Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités. »
Programmes 2016, Cycle 4 (Collège), Mathématiques, Grandeurs et mesures

Lors du Séminaire national de formation croisements didactiques : Mathématiques et physique-chimie au collège, du 10 mars 2017 à Paris, les groupes mathématiques et physique-chimie de l'Inspection générale ont conjointement confirmé qu'il était mathématiquement légitime et pertinent pour la formation des élèves d'écrire les unités de mesure dans les calculs.

Cette pratique est donc admise, en examen - BAC ou DNB - et en évaluation en classe. Aussi, pénaliser un élève à cause des unités dans les calculs n'a pas lieu d'être.

La signification du signe égal dans le cadre des grandeurs

Le signe égal signifie « la même chose que » (en première approche),
***donc* une grandeur ne peut pas être égale à un nombre (par homogénéité).**

$1 \xcancel{=} 1\,000$ MAIS $1\text{ km} = 1\,000\text{ m}$
$1 \xcancel{=} 60$ MAIS $1\text{ h} = 60\text{ min}$

$A = L \times l \xcancel{=} 3 \times 2 \xcancel{=} 6\text{ cm}^2$ MAIS $A = L \times l = 3\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$

$v = \dfrac{d}{t} \xcancel{=} \dfrac{240}{2} \xcancel{=} 120\text{ km.h}^{-1}$ MAIS $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{240\text{ km}}{2\text{ h}} = \dfrac{120\text{ km}}{1\text{ h}} = 120\text{ km/h} = 120\text{ km.h}^{-1}$

Conserver les unités dans les calculs est nécessaire lorsqu'on travaille avec des grandeurs : la signification du signe égal est ainsi préservée, l'analyse dimensionnelle comme moyen de contrôle est directement intégrée au calcul, le traitement des conversions, des unités produits et des unités quotients est facilité.

Opérations et conversions

ou l'explicitation de la grandeur de référence

Les conversions sont souvent sources d'erreurs, en particulier lorsqu'elles sont effectuées avec des tableaux de conversions. Les conversions de durées sont, elles, souvent traitées de manière différente, comme s'il n'y avait aucun lien conceptuel.

L'écriture du chiffre «1» devant le symbole de l'unité de mesure

$$L = 5\,\text{cm} = 5 \times \boxed{\mathbf{1\ cm}}$$

grandeur mesurée

symbole de l'unité de mesure

grandeur de référence
pour la mesure
(ou « unité de mesure »)

Écrire le chiffre « 1 » devant le *symbole* « cm » permet de rendre explicite la *relation de comparaison* entre la *grandeur mesurée,* ici ***L***,et la *grandeur de référence,* ici **1 cm**.

(voir ci-contre)

Au cœur de la conversion : les relations entre unités de mesure

Dans la relation mètre-centimètre, « *centi-* » signifie « *centième de* ».

Donc, « *un centimètre est le centième d'un mètre* » : $1\text{ cm} = \frac{1\text{ m}}{100}$

et « *il faut 100 centimètres pour construire un mètre* » : $100 \times 1\text{ cm} = 1\text{ m}$

Un exemple : la conversion « kilomètre en centimètre »

$$5\text{ km} = 5 \times \boxed{1\text{ km}} = 5 \times \boxed{1\,000 \times \boxed{1\text{m}}} = 5 \times \boxed{1\,000 \times \boxed{100 \times 1\text{cm}}} = 5 \times 10^5\text{ cm}$$

Explicitation de la grandeur de référence

Par définition du kilomètre

Par définition du centimètre

Plusieurs grandeurs, mais une approche unificatrice

Dans le cas de la conversion heure-minute, basée sur le système sexagésimal, l'approche reste la même : $1\text{ h} = 60\text{ min}$

$$5\text{ h} = 5 \times 1\text{ h} = 5 \times 60\text{ min} = 5 \times 60 \times 1\text{ min} = 300 \times 1\text{ min} = 300\text{ min}$$

La technique du tableau de conversion relève d'un automatisme qui ne soutient ni le sens ni la durabilité des apprentissages. L'écriture du chiffre « 1 » devant le symbole de l'unité de mesure permet l'explicitation de la grandeur de référence de la mesure. L'utilisation des relations entre unités de mesure facilite la conversion et contribue à donner du sens par la comparaison entre grandeurs.

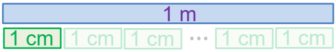
Opérations, relations entre unités et mesure

ou l'enjeu de la comparaison entre grandeurs

L'usage des opérations réciproques (voire d'astuces) est souvent perçu comme un incontournable pour isoler un terme dans une relation. Lorsque une seule grandeur est en jeu, comme pour une conversion d'unité, on peut procéder avec profit par comparaison entre unités de mesure.

Les relations mètre-centimètre

« 1 m partagé en 100 donne 1 cm »



« 1 m par rapport à 1 cm c'est 100 fois plus »

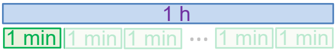
$$\frac{1\text{ m}}{100} = 1\text{ cm}$$

$$100 \times 1\text{ cm} = 1\text{ m}$$

$$\frac{1\text{ m}}{1\text{ cm}} = 100$$

Les relations heure-minute

« 1 h partagée en 60 donne 1 min »



« 1 h par rapport à 1 min c'est 60 fois plus »

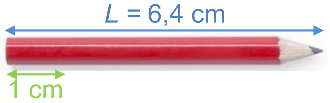
$$\frac{1\text{ h}}{60} = 1\text{ min}$$

$$60 \times 1\text{ min} = 1\text{ h}$$

$$\frac{1\text{ h}}{1\text{ min}} = 60$$

Les relations entre deux unités d'une même grandeur sont équivalentes entre elles, par construction.

La mesure en centimètres de la longueur d'un crayon



L est la grandeur mesurée
1 cm est la grandeur de référence
6,4 est la mesure de *L* en centimètres

$$\frac{L}{6{,}4} = 1\text{ cm}$$

$$L = 6{,}4 \times 1\text{ cm}$$

$$\frac{L}{1\text{ cm}} = 6{,}4$$

« 6,4 est la mesure de L en centimètres. »
La mesure d'une grandeur est le nombre issu de la comparaison entre la grandeur mesurée et une grandeur prise comme référence (l'unité de mesure).

Mesurer, c'est comparer une grandeur avec une autre de même nature, choisie comme référence (l'unité de mesure). Convertir, c'est changer de grandeur de référence. Pour cela, on explicite les relations entres les unités et leurs équivalences.

Opérations et situations de comparaison

ou les significations des opérations élémentaires

L'idée de comparaison entre deux grandeurs occupe une place centrale en sciences. Quelles sont les formes que peut prendre une comparaison ? Comment l'exprimer en langage naturel et en langage symbolique ?

Forme n°1 de la comparaison : multiplication par un nombre

« Le diamètre du Soleil *D* est **109 fois plus** grand **que** le diamètre *d* de la Terre. »

$$D = \boxed{109 \times} d$$

Forme n°2 de la comparaison : division par un nombre

« Le diamètre de la Terre est **109 fois moins** grand **que** le diamètre du Soleil. »

$$d = \frac{D}{\boxed{109}}$$

Forme n°3 de la comparaison : division par une grandeur de même nature

« Le diamètre du Soleil **par rapport à** celui de la Terre, c'est 109 fois plus. »

$$\frac{D}{d} = 109$$

Schématisation de la comparaison : le « modèle en barres »

Les situations de comparaisons peuvent être ramenées à un schéma :

Ce schéma porte l'équivalence des trois formes, et ce, quel que soit le langage choisi (symbolique ou naturel).

La comparaison de deux grandeurs peut prendre trois formes pouvant se décliner en langage naturel et symbolique. Mobiliser explicitement ces trois formes permet aux élèves de redonner du sens aux opérations élémentaires.

Opérations et isolement de terme

ou l’enjeu du raisonnement face aux astuces

L’isolement d’une grandeur dans un membre d’une égalité donne lieu à l’utilisation de nombreuses astuces (triangle magique, escaliers) ou abus de langages (passer de l’autre côté). Si ces astuces permettent l’obtention rapide d’un résultat, elles ne donnent pas de sens et confinent les élèves dans leurs difficultés. Comment replacer le raisonnement au centre des apprentissages ?

Opérations réciproques et signe égal, pour former au raisonnement

$$d = \boxed{v \times} t \quad \text{donc} \quad \frac{d}{\boxed{v}} = \frac{\cancel{\boxed{v \times}}\, t}{\boxed{\cancel{v}}} \quad \text{donc} \quad \frac{d}{v} = t \quad \text{donc} \quad t = \frac{d}{v}$$

Pour compenser l’opération « multiplier par *v* » on réalise l’opération « diviser par *v* » (les deux traits rouges symbolisent la simplification)

Comme le signe égal signifie « la même chose que », l’opération « diviser par *v* » est appliquée aux deux membres de l’égalité.

Comme le signe égal signifie « la même chose que », les deux membres de l’égalité peuvent être intervertis.

Opération réciproque : pour compenser la multiplication par *v*, on fait appel à la division par *v*.

Signification du signe « = » : « la même chose que » (dans une première approche)

Pour les manipulations algébriques, l’écriture en colonne des égalités successives est souvent plus aidante pour les élèves que l’écriture en ligne.

Comportements au sein d’une relation : une procédure de contrôle

L’expression $t = \frac{d}{v}$ obtenue par isolement de terme peut être contrôlée via une analyse du comportement des grandeurs variables.

Par exemple l’expression obtenue prévoit que 1) si *d* est doublée alors, à *v* constant, *t* double aussi ; 2) si *v* est doublée alors, à *d* constante, *t* est divisé par deux. Ces prévisions sont conformes à ce qui est obtenu expérimentalement, donc l’expression est pertinente.

L’approche par opération réciproque est une approche algébrique universelle en mathématiques. L’étude de la relation en lien avec la réalité expérimentale permet de donner du sens pour l’élève.

Proportionnalité et langage naturel

ou la mobilisation explicite des propriétés multiplicative et additive

À partir du cycle 4, la proportionnalité est souvent réduite au produit en croix. Pourtant, dès l'école élémentaire, les enfants mènent différents types de raisonnements, notamment au moyen du langage naturel, en verbalisant la propriété multiplicative de la linéarité et le passage à l'unité de mesure.

Le langage naturel : un appui majeur pour raisonner

« Une voiture roule à 50 km/h »
« on a 50 km pour 1 h »

} La vitesse est traduite en une relation de proportionnalité

« Donc, par proportionnalité, on a 2 fois plus de kilomètres pour 2 fois plus d'heures » : 2×50 km pour 2×1 h

} Propriété multiplicative

Passage par l'unité de mesure : approche élémentaire et performante

« Une voiture roule à vitesse constante et parcourt 150 km en 3 h. Quelle sera la distance parcourue en 5 h ? »

« on a 150 km pour 3 h, donc

pour 1 h on a 3 fois moins de kilomètres : $\frac{150\text{ km}}{3}$ ← Passage par l'unité de durée

pour 5 h, on a 5 fois plus de kilomètres : $5 \times \frac{150\text{ km}}{3}$ *»*

Via la propriété multiplicative, le passage par l'unité de mesure permet de résoudre la plupart des situations de proportionnalité.

Du langage naturel au langage symbolique : éléments de traduction

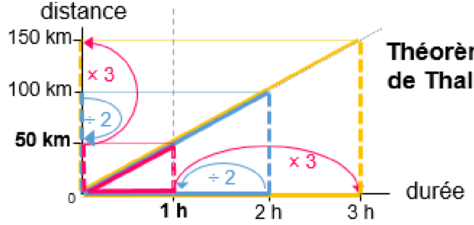
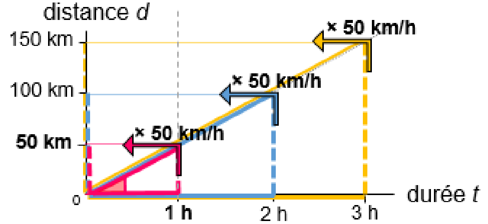
150 km **pour** **3** heures $\overset{\div 3}{\underset{\div 3}{\text{donc}}}$ 50 km **pour** **1** heure donc 50 km **par** heure } Langage naturel

$$\frac{150\text{ km}}{3\text{ h}} \overset{\div 3}{\underset{\div 3}{=}} \frac{50\text{ km}}{1\text{ h}} = 50\text{ km / h}$$ } Langage symbolique

Le langage naturel verbalisé et le passage par l'unité de mesure permettent de traiter les situations de proportionnalité. Mobiliser explicitement les propriétés et varier les représentations enrichissent le concept de proportionnalité.

Proportionnalité, langages et approches

ou l'enjeu de varier les représentations

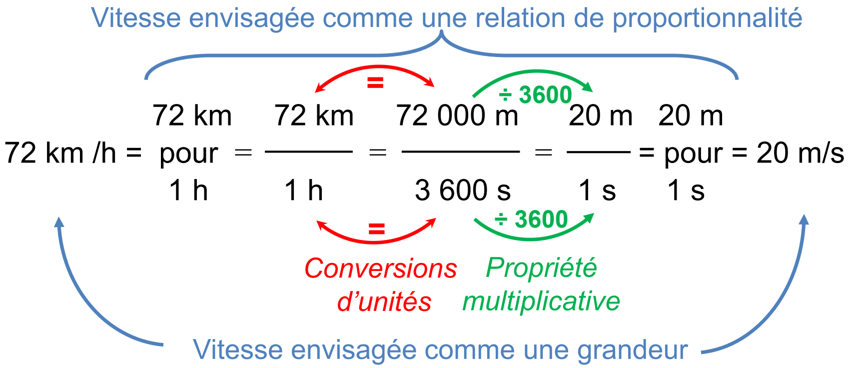
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Situation : une voiture roule à vitesse constante et parcourt 100 km en 2 h.
Quelle sera la distance parcourue en 3 h ?</td></tr>
<tr><td></td><td>1^{er} éclairage :
la propriété multiplicative
<i>« Deux grandeurs sont proportionnelles si, lorsque l'une est multipliée ou divisée par un nombre, l'autre est aussi multipliée ou divisée par le même nombre. »</i></td><td>2nd éclairage :
le coefficient de proportionnalité
<i>« Deux grandeurs sont proportionnelles si l'une est égale à l'autre multipliée par une troisième grandeur, qui est constante. Cette grandeur est appelée coefficient de proportionnalité. »</i></td></tr>
<tr><td>En langage naturel</td><td>On a : une distance pour une durée
100 km pour 2 h $\xrightarrow[\div 2]{\div 2}$ donc 50 km pour 1 h $\xrightarrow[\times 3]{\times 3}$ donc 150 km pour 3 h</td><td rowspan="2">Le coefficient de proportionnalité :
$\text{vitesse} = \frac{100\text{ km}}{2\text{ h}} = \boxed{\frac{50\text{ km}}{1\text{ h}} = 50\text{ km/h}}$
On passe de la durée à la distance par la vitesse :
distance = vitesse × durée
$\text{distance} = \mathbf{50\text{ km/h}} \times 3\text{ h} = \frac{\mathbf{50\text{ km}}}{\mathbf{1\text{ h}}} \times 3\text{ h} = 150\text{ km}$</td></tr>
<tr><td>En langage symbolique</td><td>$\frac{\text{distance}}{\text{durée}} = \frac{100\text{ km}}{2\text{ h}} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}} \frac{\mathbf{50\text{ km}}}{\mathbf{1\text{ h}}} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} \frac{150\text{ km}}{3\text{ h}}$</td></tr>
<tr><td>En tableau</td><td>÷ 2 × 3
<table><tr><td>distance</td><td>100 km</td><td>50 km</td><td>150 km</td></tr><tr><td>durée</td><td>2 h</td><td>1 h</td><td>3 h</td></tr></table>÷ 2 × 3</td><td><table><tr><td>distance <i>d</i></td><td>100 km</td><td>50 km</td><td>150 km</td></tr><tr><td>durée <i>t</i></td><td>2 h</td><td>1 h</td><td>3 h</td></tr></table>× 50 km/h
Le coefficient de proportionnalité permettant de passer des durées aux distances est ici privilégié : c'est la vitesse.</td></tr>
<tr><td>En graphiques-géométrie</td><td>
Théorème de Thalès</td><td> </td></tr>
</table>

Proportionnalité et conversions

ou une nouvelle signification du trait de fraction

La conversion des kilomètres par heure en mètres par seconde est parfois envisagée via « l'astuce du 3,6 » qui ne fait pas sens pour les élèves. Les conversions d'autres grandeurs quotients posent aussi souvent problème.

Grandeur quotient : entre grandeur et relation de proportionnalité



$$72\text{ km /h} = \begin{matrix}72\text{ km}\\ \text{pour}\\ 1\text{ h}\end{matrix} = \frac{72\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{72\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = \frac{20\text{ m}}{1\text{ s}} = \begin{matrix}20\text{ m}\\ \text{pour}\\ 1\text{ s}\end{matrix} = 20\text{ m/s}$$

Polysémie du trait de fraction : une 3^{e} signification

La division d'une grandeur par une grandeur de nature différente correspond à une mise en relation par proportionnalité.
Le calcul 10 m / 2 s = 5 m/s peut se traduire en langage naturel par :
« 10 m pour 2 s, d'où 5 m pour 1 s »

Il s'agit ici un nouveau sens du trait de fraction,
très différent de ceux déjà décrits en page 8 (division d'une grandeur par un nombre, et division d'une grandeur par une grandeur de même nature).

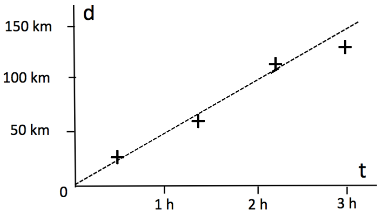
Les conversions de grandeurs quotients prennent sens lorsqu'elles sont envisagées dans le cadre de la proportionnalité. Traduire ce raisonnement en langage symbolique revient à donner une nouvelle signification au trait de fraction.

Proportionnalité, graphiques et modèles

ou la nécessité de cohérence entre disciplines

En mathématiques, des données rendent comptent d'une situation de proportionnalité si les points du graphique sont alignés avec l'origine, alors qu'en sciences expérimentales, des points en tendance alignés permettent d'envisager la possibilité d'une relation de proportionnalité entre grandeurs. Comment retrouver de la cohérence dans le discours tenu auprès des élèves ?

Données expérimentales versus modèle de relation entre grandeurs



Les points du graphique ne sont pas alignés. Donc, **les *valeurs mesurées* de la distance parcourue et de la durée ne sont pas proportionnelles.**

Cependant, envisagés comme expérimentaux (incertitudes de mesure), **les points du graphique sont compatibles avec le choix d'un modèle** de dépendance par proportionnalité entre la distance et la durée (ici, la droite).

Situation matérielle et modélisation : à la croisée des deux cultures

Un modèle peut être envisagé comme un ensemble de concepts (ici *la grandeur distance* et *la grandeur temps*) mis en relations (ici par *la proportionnalité*) en vue de donner du sens à une situation matérielle et de faire des prédictions (ici *les données expérimentales réalisées ou à venir*).

Mobiliser l'idée de modèle de relation entre grandeurs permet de rendre cohérents les points de vue des mathématiques et de la physique- chimie lorsqu'il s'agit d'analyser des données expérimentales.

La modélisation est l'étape de conceptualisation du monde matériel : il s'agit d'une démarche intellectuelle partagée entre les mathématiques et la physique-chimie. L'importance du modèle pour la formation des élèves est explicite dans les programmes des deux disciplines. Les grandeurs occupent une place singulière dans l'analyse des situations matérielles.

Conclusion et approfondissements

La maîtrise de la langue et des langages ainsi que la maîtrise des nombres et des grandeurs sont des objets d'apprentissages partagés entre disciplines. Leur enseignement est l'affaire de tous. En prendre soin, c'est mieux former les élèves et le citoyen.

Découvrir les productions G2M

https://irem.u-paris.fr/g2m-les-grandeurs-et-les-modelisations

Former en présence ou à distance avec G2M

g2m@irem.univ-paris-diderot.fr

Les mathématiques : une priorité académique

https://www.ac-creteil.fr/les-mathematiques-une-priorite-academique-122252

@accreteil

facebook.fr/academie.creteil

linkedin.com/company/academie-de-creteil/

@academiecreteil

© Rectorat de l'académie de Créteil – Direction de la communication / Crédit illustrations : © iStockphoto.com